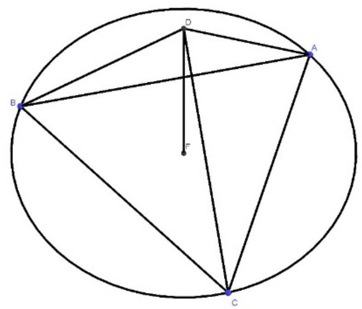
付録 C 授業使用ワークシート一覧

2022/10/4 中 3 幾何第 7 回　§1 平面から立体へ

組　　　番　氏名：

問題 1

（示すべき命題）
$\triangle$ABC に対して，ABC と同じ平面にない点 D を AD = BD = CD となるようにとる．いま D から平面 ABC に下ろした垂線の足を F とすると，F は$\triangle$ABC の外心である．



上の命題について，立体を考えることなく説明したい．

（復習）
$\triangle$ABC の外心とは，$\triangle$ABC の 3 辺 AB, BC, CA の 3 本の垂直二等分線が交わる交点のことをいう．（外心が存在することは自明ではないが，証明は可能であった．）

(1) 上から見た図（平面図）を考えることで上の命題が説明できないか考えてみよ．
(2) $\triangle$DFA，$\triangle$DFB，$\triangle$DFC を考えることで説明できないか考えてみよ．

類題 1

(1) 問題 1 の命題について，前提と結論を書け．

前提：

結論：

(2) 問題 1 の命題について，前提や結論を入れ替えたり，変えたりすることで別の命題を作ってみよ．また，それが真であるか，偽であるかを予想してみよ．
（可能なら説明してみよ．）

本日の活動の振り返り

今日の授業を振り返り，以下の質問に答えてください．（所要時間 1 分程度）

次の内容について，今のあなたの思いを 1～5 の選択肢から選び，そう思った理由を教えてください．

今日の授業の内容はよく分かった．

全くそう思わない	あまりそう思わない	そう思う	かなりそう思う	すごくそう思う
①	②	③	④	⑤

そう思った理由は？：

[ ]

2022/10/11 中３幾何第８回　§２「平面」と「空間」

組　　番　氏名：

問題１

以下は定理１の内容である．

> （定理１）以下の平面は必ず存在し，かつただ一つに決まる．
> ⓪　一直線上にない３点を含む平面（公理Ⅳ）
> ①　１つの直線 ℓ，および ℓ 上にない１点Ｐを含む平面
> ②　相交わる２直線 ℓ，ｍとを含む平面
> ③　平行な２直線 ℓ，ｍを含む平面

(1) ①「１つの直線 ℓ，および ℓ 上にない１点Ｐを含む平面」が必ず存在し，かつただ一つに決まるとき，
②「相交わる２直線 ℓ，ｍとを含む平面」も必ず存在することを証明せよ．

(2) ①「１つの直線 ℓ，および ℓ 上にない１点Ｐを含む平面」が必ず存在し，かつただ一つに決まるとき，
③「平行な２直線 ℓ，ｍを含む平面」も必ず存在することを証明せよ．

類題１

問題１の命題について，条件を変えることで別の命題を作ってみよ．また，それが真であるか，偽であるかを予想してみよ．
（可能なら説明してみよ．）

問題 2

以下は定理 1 の内容である．

以下の平面は必ず存在し，かつただ一つに決まる．
⓪　一直線上にない 3 点を含む平面（公理 IV）
①　1 つの直線 ℓ，および ℓ 上にない 1 点 P を含む平面
②　相交わる 2 直線 ℓ，m とを含む平面
③　平行な 2 直線 ℓ，m を含む平面

(1) ①「1 つの直線 ℓ，および ℓ 上にない 1 点 P を含む平面」が必ず存在し，かつただ一つに決まるとき，
⓪「一直線上にない 3 点を含む平面」が必ず存在することを証明せよ．
（これは①の替わりに②を公理として採用できることを意味する．）

(2) ⓪「一直線上にない 3 点を含む平面」が必ず存在し，かつただ一つに決まるとき，
①，②，③のような平面も***ただ一つ***存在することを説明しなさい．

本日の活動の振り返り

今日の授業を振り返り．以下の質問に答えてください．（所要時間 1 分程度）

次の内容について，今のあなたの思いを 1～5 の選択肢から選び，そう思った理由を教えてください．

今日の授業の内容はよく分かった．

全くそう思わない	あまりそう思わない	そう思う	かなりそう思う	すごくそう思う
①	②	③	④	⑤

そう思った理由は？：
[　　　　　　　　　　]

2022/10/12 中 3 幾何第 9 回　§3 平面の平行と交線 1

組　　　番　氏名：

問題 1

以下は定理 2 の内容である．

（定理 2）直線 ℓ と平面 α が交点を持つ場合，交点はただ一つに限る．
（二つ以上の交点を持たない．）

この定理が成り立つことを背理法で証明したい．

(1) 定理 2 の前提と結論を書け．

前提：

結論：

(2) 定理 2 について，背理法を用いて証明せよ．

類題 1

問題 1 の命題について，条件を変えることで別の命題を作ってみよ．また，それが真であるか，偽であるかを予想してみよ．
（可能なら説明してみよ．）

問題 2

P.8 例題 1 では 3 直線の位置関係について分類した.
では，3 平面の位置関係について，どのような場合があるか．3 平面の交点，または交線の個数に注目して場合分けせよ.

本日の活動の振り返り

今日の授業を振り返り．以下の質問に答えてください．(所要時間 1 分程度)

次の内容について，今のあなたの思いを 1～5 の選択肢から選び，そう思った理由を教えてください.

今日の授業の内容はよく分かった.

全くそう思わない	あまりそう思わない	そう思う	かなりそう思う	すごくそう思う
①	②	③	④	⑤

そう思った理由は？：

[ ]

組　　番　氏名：

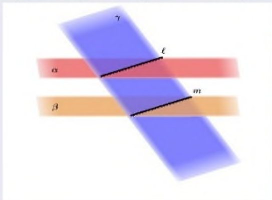
問題 1

以下は定理 4 およびその証明である．

定理 4

平行 2 平面を第 3 の平面できれば，切り口の 2 つの交線は平行である．すなわち 3 平面 α, β, γ について α と γ の交線 ℓ, β と γ の交線 m とすると

$\alpha // \beta, \alpha \not\parallel \gamma, \beta \not\parallel \gamma \implies \ell \,/\!/\, m$　である．



(証明)　$\ell \,/\!/\, m$ であることを示すには，ℓ と m が
①同一平面上にあり，かつ
②交わらない　ことを示せばよい．

ℓ, m はともに平面 γ 上にあるため
2 直線は同一平面上にある．……①

次に，ℓ, m が交わらないことを背理法で示す．
2 直線 ℓ と m が共有点 P をもつとすると，P は直線 ℓ 上より平面 α 上にある．また，P は直線 m 上より平面 β 上にある．すなわち点 P は 2 平面 α, β の両方の上にあることになるが，これは $\alpha \,/\!/\, \beta$，すなわち 2 平面 α, β が共有点をもたないことに矛盾．以上より，2 直線 ℓ, m は交わらない．……②

①, ② より $\ell \,/\!/\, m$ (Q.E.D.)

(1) 定理 4 の前提および結論を挙げよ．

前提：

結論：

(2) 定理 4 の証明を読み，その使われている要素（定義，定理など）をすべて書き出せ．

類題 1

以下は定理 4 の逆である．

（定理 4 の逆）3 平面 α, β, γ について，$\alpha \nparallel \gamma, \beta \nparallel \gamma$ とする．いま α と γ の交線を ℓ，β と γ の交線を m とするとき
$\ell \parallel m \Rightarrow \alpha \parallel \beta$
（ある平面で切った切り口が平行な 2 平面は平行である．）

この定理 4 の逆が成り立つ（すなわち真である）かどうかを検討せよ．成り立つ場合は証明し，成り立たない場合は反例をあげよ．

問題 2

同一平面に平行な 2 平面は平行であること，すなわち 3 平面 α，β，γ について
$\alpha \parallel \beta,\ \beta \parallel \gamma \Rightarrow \alpha \parallel \gamma$
であることを証明せよ．定理 4，および定理 5 は用いてよい．

本日の活動の振り返り

今日の授業を振り返り．以下の質問に答えてください．（所要時間 1 分程度）

次の内容について，今のあなたの思いを 1～5 の選択肢から選び，そう思った理由を教えてください．

今日の授業の内容はよく分かった．

全くそう思わない	あまりそう思わない	そう思う	かなりそう思う	すごくそう思う
①	②	③	④	⑤

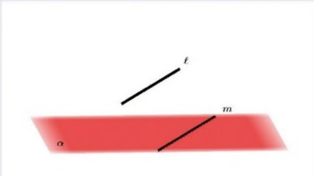
そう思った理由は？：
[　　　　]

問題 1

以下は定理 6 およびその証明である．

定理 6

平行 2 直線の一方を含んで他方を含まない (他方とは交わるかもしれない) 平面は他の一方に平行である．
すなわち，2 直線 ℓ, m および平面 α について
$\ell /\!/ m$ かつ ℓ は α 上になく，m は α 上 $\Longrightarrow \ell /\!/ \alpha$



(証明)

$\ell /\!/ m$ より，2 直線 ℓ, m を含む平面 β がとれる．

ここでいま $\ell \not\parallel \alpha$ とすると，ℓ と α の交点 P が平面 α 上に存在する．
すると，点 P は直線 ℓ 上より平面 β 上．かつ平面 α 上にある．
すなわち，点 P は平面 α と β の交線 m 上に存在．よって直線 ℓ と直線 m が点 P で交わることとなり，$\ell /\!/ m$ に矛盾．

$\therefore\ \ell /\!/ \alpha$　　(Q.E.D.)

問：定理 6 の証明を読み，その使われている要素（定義，定理など）をすべて書き出せ．

組　　　番　　氏名：

類題 1

定理 6 について，前提や結論を変えることで新しく別の命題を作ってみよ．また，それが真であるか，偽であるかを予想してみよ．
（可能なら説明してみよ．）

新しく作った命題
前提：

結論：

真か偽か：

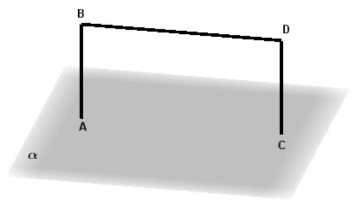
（証明）

問題 2

電柱に張られた電線が地面と平行かどうかを確かめる方法を考えたい．

下図のように地面 α 上の地点 A に電柱 AB が，地点 C に電柱 CD があり，2 本の電柱の先端のあいだに電線 BD が張られているモデルを考える．

いま電線 BD と地面 α が平行であることを確かめるにはどうすればよいか．ただし，地面 α はデコボコのない平坦な平面であるものとし，電線 BD のたるみなど細かい条件は全て無視することとする．また，今まで扱った定理は用いてよい．



本日の活動の振り返り

今日の授業を振り返り．以下の質問に答えてください．(所要時間 1 分程度)

次の内容について，今のあなたの思いを 1～5 の選択肢から選び，そう思った理由を教えてください．

1 今日行った活動は面白いと思った．

そう思わない	あまりそう思わない	そう思う	かなりそう思う	すごくそう思う
①	②	③	④	⑤

そう思った理由は？：

[　　　　　　　　　　　　　　　　]

2 今日行った活動は意味があると思った．

そう思わない	あまりそう思わない	そう思う	かなりそう思う	すごくそう思う
①	②	③	④	⑤

そう思った理由は？：

[　　　　　　　　　　　　　　　　]

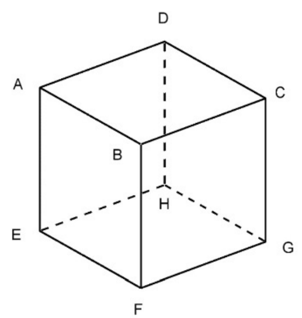
3 ．授業に関する感想は？

2022/10/24 中 3 幾何第 12 回　§4～§6　直線・平面のなす角と垂直・平行

提出不要

問題 1

以下の立方体 ABCD-EFGH を構成する辺や面のうち，以下のような辺や面を答えよ．理由を簡単に説明すること．なお，平面を述べる場合には「面 ABFE」のように 4 隅の点を用いて答えるようにする．



(1) 直線 AB と平行な直線

(2) 直線 AB と垂直な直線

(3) 面 ABFE と垂直な直線

(4) 面 ABFE と平行な直線

(5) 面 ABFE と平行な面

(6) 面 ABFE と垂直な面

(7) 直線 AB を含む面（理由不要）

(8) 直線 AB と垂直な面

(9) 直線 AB と平行な面

問題 2

以下の命題について常に成り立つものには○を，成り立たない場合があるものには×を書き入れよ．
なお，α, β, γ は平面を，ℓ, m, n, o は直線を表し，それぞれ異なるものとする．
図を描いて考えれば証明は不要．

(1) $\ell /\!/ \alpha,\ m /\!/ \alpha \Longrightarrow \ell /\!/ m$

(2) ℓ と m, m と n が同一平面上にある $\Longrightarrow$ ℓ と n も同一平面上にある

(3) $\ell \perp m,\ m \perp n \Longrightarrow \ell /\!/ n$

(4) $\alpha \perp \beta,\ \beta \perp \gamma \Longrightarrow \alpha /\!/ \gamma$

(5) $\ell /\!/ m,\ m \perp n \Longrightarrow \ell \perp n$

(6) $\alpha /\!/ \beta,\ \beta \perp \gamma \Longrightarrow \alpha \perp \gamma$

(7) $\ell \perp \alpha,\ \alpha /\!/ \beta \Longrightarrow \ell \perp \beta$

(8) $\ell /\!/ \alpha,\ \alpha \perp \beta \Longrightarrow \ell \perp \beta$

(9) $\ell /\!/ m,\ \ell \perp \alpha \Longrightarrow m \perp \alpha$

(10) $\ell \perp m,\ \ell /\!/ \alpha \Longrightarrow m /\!/ \alpha$

(11) $\ell \perp m,\ \ell \perp \alpha \Longrightarrow m /\!/ \alpha$

(12) ℓ 上の点 P を通り ℓ に垂直な直線はただ 1 つである．

(13) ℓ 上の点 P を通り ℓ に垂直な平面はただ 1 つである．

(14) α 上の点 P を通り α に垂直な直線はただ 1 つである．

(15) α 上の点 P を通り α に垂直な平面はただ 1 つである．

組　　番　氏名：

本日の活動の振り返り

今日の授業を振り返り．以下の質問に答えてください．(所要時間 1 分程度)

次の内容について，今のあなたの思いを 1〜5 の選択肢から選び，そう思った理由を教えてください．

今日の授業の内容はよく分かった．

全くそう思わない	あまりそう思わない	そう思う	かなりそう思う	すごくそう思う
①	②	③	④	⑤

そう思った理由は？：

[　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　]

2022/10/31 中3幾何 第13回 §7 三垂線の定理

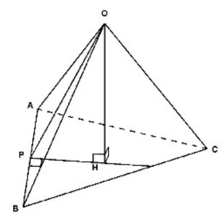
__組__番 氏名____________

定理 12 三垂線の定理

平面 α 外の1点Pより α に下ろした垂線の足をQ，Qから α 上の任意の直線 ℓ に引いた垂線の足をRとすると，直線PRは ℓ に垂直である．すなわち，$\mathrm{PQ}\perp\alpha$，$\mathrm{QR}\perp\ell \Longrightarrow \mathrm{PR}\perp\ell$

問題 1

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$ である三角錐 O-ABC において，Oから平面ABCに下ろした垂線の足をH, HからABに下ろした垂線の足をPとすると，PはABの中点であることを三垂線の定理を用いて示せ．



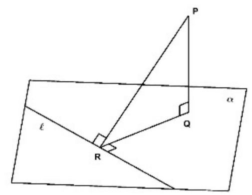
問題 2

以下の三垂線の逆定理を背理法を用いて証明せよ．

定理 12 逆

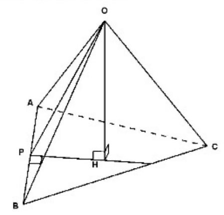
平面 α 外の1点Pより α に下ろした垂線の足をQ，Pから α 上の任意の直線 ℓ に引いた垂線の足をRとすると

$\mathrm{PQ}\perp\alpha, \mathrm{PR}\perp\ell \Longrightarrow \mathrm{QR}\perp\ell$



問題 3

OA = OB = OC である三角錐 O-ABC において，O から平面 ABC に下ろした垂線の足を H, O から AB に下ろした垂線の足を P とすると，直線 PH は線分 AB の平面 ABC における垂直二等分線であることを三垂線の逆定理を用いて示せ．



本日の活動の振り返り

今日の授業を振り返り．以下の質問に答えてください．(所要時間 1 分程度)

次の内容について，今のあなたの思いを 1〜5 の選択肢から選び，そう思った理由を教えてください．

今日の授業の内容はよく分かった．

全くそう思わない	あまりそう思わない	そう思う	かなりそう思う	すごくそう思う
①	②	③	④	⑤

そう思った理由は？：

[　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　]

2022/11/01 中3幾何 第14回 §8 三角錐の体積

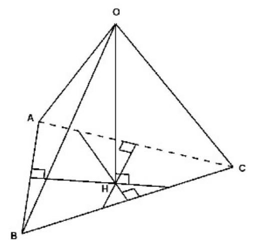
__組__番　氏名________________

定理12 三垂線の定理

平面 α 外の1点Pより α に下ろした垂線の足をQ，Qから α 上の任意の直線 ℓ に引いた垂線の足をRとすると，直線PRは ℓ に垂直である．すなわち，$PQ \perp \alpha$, $QR \perp \ell \Longrightarrow PR \perp \ell$

定理13

三角錐O-ABCにおいて，$OA = OB = OC$ であるとき(三角錐の稜線がすべて等しいとき)
Oから平面ABCに下ろした垂線の足Hは，$\triangle ABC$ の外心と一致する．(第12回問題3の一般化)



問題1

以下の三角錐について底面積，高さを求めることでその体積を求めよ．
ただし，角錐の体積が(底面積) $\times$ (高さ) $\times \dfrac{1}{3}$ であることは証明なしに用いてよい．

(1) $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$, $OA = OB = OC = 7$ である三角錐O-ABC

(2) $AB = BC = CA = 2$, $OA = OB = OC = 3$ である三角錐O-ABC

問題 2

下の条件を満たす三角錐 O-ABC の体積を求めよ．
ただし，角錐の体積が $\frac{1}{3} \times$ (底面積) $\times$ (高さ) であることは用いてよい．

(1) $OA = OB = OC = 7$, $AB = 5$, $BC = 13$, $CA = 12$

(2) $OA = OB = OC = 2$, $AB = BC = CA = 1$

(3) $OA = OB = OC = 4$, $AB = AC = 5$, $BC = 6$

本日の活動の振り返り

今日の授業を振り返り，以下の質問に答えてください．（所要時間１分程度）

次の内容について，今のあなたの思いを 1～5 の選択肢から選び，そう思った理由を教えてください．

今日の授業の内容はよく分かった．

全くそう思わない	あまりそう思わない	そう思う	かなりそう思う	すごくそう思う
①	②	③	④	⑤

そう思った理由は？：

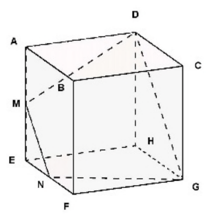
[　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　]

2022/11/07 中3幾何 第15回 §8〜§10 体積

__組__番　氏名____________

問題1

1辺の長さが6である立方体ABCD-EFGHにおいて，点M,Nを辺AE, EFの中点とする．いま立方体を平面MNGDで切断し，四角錐H-DMNGを取り去るとき，残りの立体の体積を求めよ．



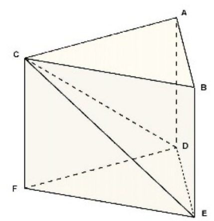
問題2

底面が面積$4\sqrt{3}\text{cm}^2$の正三角形で，高さが3cmの正三角柱ABC-DEFがある．頂点C,D,Eを通る平面でこの立体を切ったとき

(1) 辺DEの長さを求めなさい．

(2) 切り口$\triangle$CDEの面積を求めなさい．

(3) 頂点Fと切り口の平面CDEとの距離を求めなさい．　(駒込高)



問題 3

三角錐 O-ABC が以下の条件を満たすとき，三角錐 O-ABC の図を描き，その体積を求めよ．
ただし，角錐の体積が $\frac{1}{3} \times (\text{底面積}) \times (\text{高さ})$ であることは用いてよい．

(1) $OA = OB = OC = 3,\ AB = \sqrt{5},\ AC = \sqrt{11},\ BC = 4$

(2) $OA = OB = OC = 5,\ AB = AC = 5,\ BC = 8$

本日の活動の振り返り

今日の授業を振り返り，以下の質問に答えてください．(所要時間 1 分程度)

次の内容について，今のあなたの思いを 1～5 の選択肢から選び，そう思った理由を教えてください．

今日の授業の内容はよく分かった．

全くそう思わない	あまりそう思わない	そう思う	かなりそう思う	すごくそう思う
①	②	③	④	⑤

そう思った理由は？：

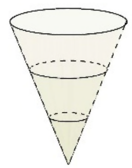
[　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　]

2022/11/08 中3幾何 第16回 §11 円柱・円錐・球の体積

__組__番 氏名____________________

問題1

図のような直円錐の容器に深さ5cmまで水が入っている．水面をさらに5cm高くするのに 140cm^3 の水を要した．このとき，最初にあった水の体積を求めよ． (中央大附高)

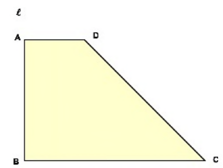


問題2

下図の台形ABCDは $AD=2$，$AB=4$，$BC=6$，$\angle DAB=\angle ABC=\angle R$ である．これを直線 ℓ を軸として1回転できる立体について

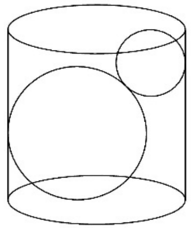
(1) 立体の体積を求めよ．

(2) 立体の表面積を求めよ． (平安高)



問題 3

底面の半径が 5 の直円柱の容器の中に，体積の比が 1 : 8 の球を入れると，図のように静止した．この容器に水面がちょうど小さい球と接するところまで水を注ぐと水面の高さは 10 であった．このとき，小さいほうの球の半径を求めよ．　(平安高)



本日の活動の振り返り

今日の授業を振り返り，以下の質問に答えてください．(所要時間 1 分程度)

次の内容について，今のあなたの思いを 1～5 の選択肢から選び，そう思った理由を教えてください．

今日の授業の内容はよく分かった．

全くそう思わない	あまりそう思わない	そう思う	かなりそう思う	すごくそう思う
①	②	③	④	⑤

そう思った理由は？：

[　　　　　　　　]

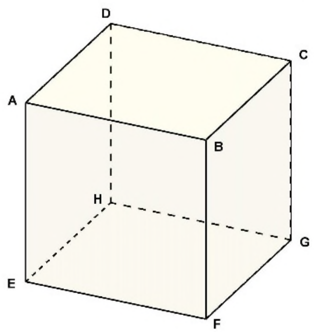
2022/11/15 中3幾何 第17回 §12 体積と切断面

＿組＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

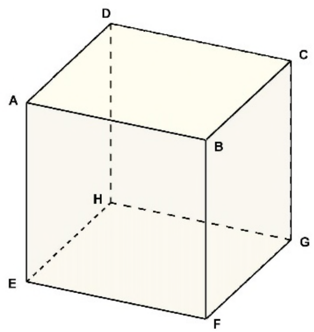
問題1

立方体 ABCD-EFGH を，以下のような平面で切ったときの切り口をかき入れ，その図形の名称を答えよ．すべて終わったら断面にできる図形の面積を求めよ．ただし，立方体の1辺の長さを6とする．

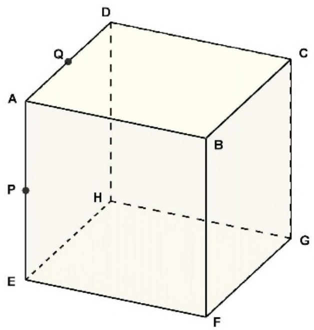
(1) 3点 D, E, G を通る平面



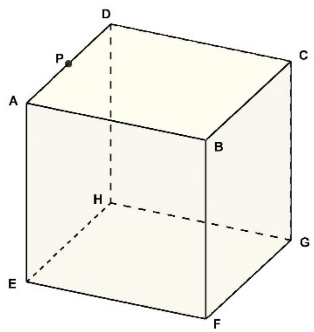
(2) 3点 A, C, E を通る平面



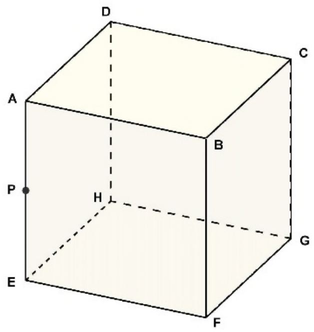
(3) AE の中点 P, AD の中点 Q とするとき，
3点 P, Q, B を通る平面



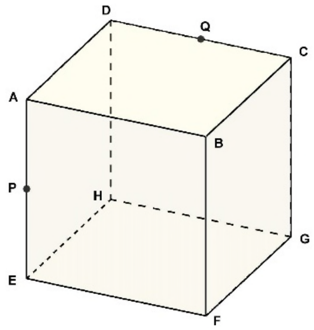
(4) AD の中点 P とするとき，3点 P, E, G を通る平面



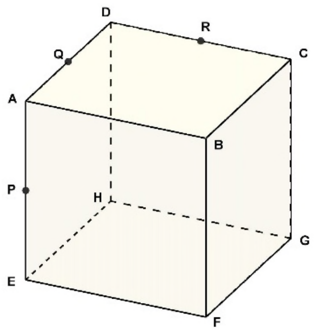
(5) AE の中点 P とするとき，3 点 D, F, P を通る平面



(6) AE の中点 P, CD の中点 Q とするとき，
3 点 P, Q, G を通る平面



(7) AE の中点 P, AD の中点 Q, CD の中点 R とするとき，3 点 P, Q, R を通る平面



本日の活動の振り返り

今日の授業を振り返り，以下の質問に答えてください．(所要時間 1 分程度)

次の内容について，今のあなたの思いを 1～5 の選択肢から選び，そう思った理由を教えてください．

今日の授業の内容はよく分かった．

全くそう思わない	あまりそう思わない	そう思う	かなりそう思う	すごくそう思う
①	②	③	④	⑤

そう思った理由は？：

[ ]

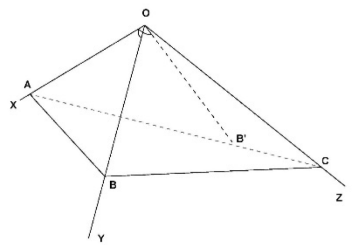
2022/11/21 中 3 幾何 第 18 回 §13 多面角

__組__番 氏名____________

定理 20

3 面角を構成する面角のうち，2 つの面角の和は残り 1 つの面角よりも大きい．すなわち，3 面角 $\angle$O-XYZ において

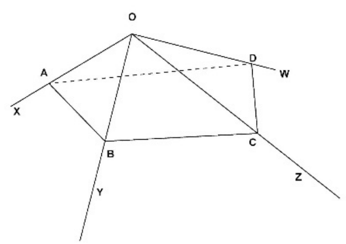
$\angle \mathrm{XOY} + \angle \mathrm{YOZ} > \angle \mathrm{ZOX}$



定理 21

凸 4 面角の面角の和は 4$\angle$R より小さい．すなわち，凸 4 面角 O-XYZW について

$\angle \mathrm{XOY} + \angle \mathrm{YOZ} + \angle \mathrm{ZOW} + \angle \mathrm{WOX} < 4\angle \mathrm{R}$



問題 1

すべての面角が直角である 3 面角を直 3 面角と呼ぶ．直 3 面角を平面で切った切断面にできる三角形は鋭角三角形であることを示せ．
(このことから，立方体や直方体の切断面にできる三角形は鋭角三角形に限ることがいえる．)

問題 2

すべての辺が同一平面上にない多角形をゴーシュ多角形と呼ぶ．ゴーシュ4 角形の 4 つの角の和は $4\angle R$ より小さいことを示せ．

本日の活動の振り返り

今日の授業を振り返り．以下の質問に答えてください．(所要時間 1 分程度)

次の内容について，今のあなたの思いを 1～5 の選択肢から選び，そう思った理由を教えてください．

今日の授業の内容はよく分かった．

全くそう思わない	あまりそう思わない	そう思う	かなりそう思う	すごくそう思う
①	②	③	④	⑤

そう思った理由は？：

[　　　　]

2022/11/28 中3幾何 第19回 §14-15 多面体

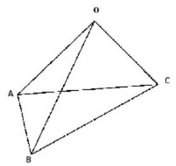
__組__番　氏名____________

問題1

(1) 以下の図①～④について，頂点の数 V, 稜の数 E, 面の数 F を数えよ．
(④ のように重複している場合，例えば OB は OG と GB というように分けて数える．)

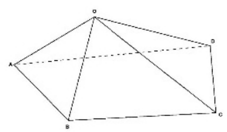
(2) 以下の図⑤，⑥について，頂点の数 V, 稜の数 E, 面の数 F を工夫して計算せよ．

①



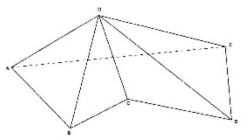
$V=$　　　$E=$　　　$F=$

②



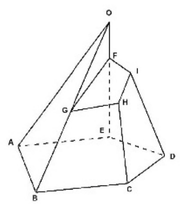
$V=$　　　$E=$　　　$F=$

③



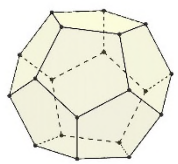
$V=$　　　$E=$　　　$F=$

④



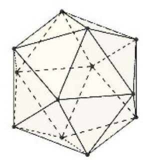
$V=$　　　$E=$　　　$F=$

⑤



$V=$　　　$E=$　　　$F=$

⑥



$V=$　　　$E=$　　　$F=$

問題2

いわゆる「サッカーボール型」と言われる「角切り二十面体」なる立体はどの頂点についても1つの頂点のまわりに正五角形が1面と正六角形が2面があつまってできており，全部で正五角形が12面と正六角形が20面からできているという．

このとき，この立体の頂点数 V，辺数 E，および面数 F を求めよ．

問題 3

正多面体を構成する面が正三角形，正方形，正五角形の 3 種に限ることを証明せよ．ただし，正多面体はいずれの面も正多角形でできており，かつどの頂点の周りにも同じ正多角形が同じ数だけ集まっている対称性を持っているものとする．

本日の活動の振り返り

今日の授業を振り返り，以下の質問に答えてください．(所要時間 1 分程度)

次の内容について，今のあなたの思いを 1～5 の選択肢から選び，そう思った理由を教えてください．

今日の授業の内容はよく分かった．

全くそう思わない	あまりそう思わない	そう思う	かなりそう思う	すごくそう思う
①	②	③	④	⑤

そう思った理由は？：

[　　　　]

2022/11/29 中3幾何 第20回 §17 正多面体

問題1

(1) 1辺の長さが1である正四面体の体積を求めよ．

(2) 1辺の長さが1である正八面体の体積を求めよ．

問題2

1辺の長さが1である正四面体に内接する内接球の半径をもとめよ．ただし，内接球とは三角錐の各面と接する球を指し，内接球は各面の内心 (すなわち外心・重心・垂心) において各面と接するものとする．

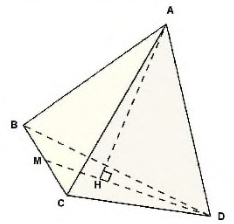
※ 四面体の内心の本来の定義は「四面体の6つの二面角の二等分面が1点で交わる点」，外心の本来の定義は「四面体の6つの稜の垂直二等分面が1点で交わる点」である．存在することは本来証明が必要だが，ここでは省略する．また，正四面体においては外心と内心が一致することを利用してもよい．

2022/11/29 中3幾何 第20回　§17 正多面体 解答例

問題1

(1) 1辺の長さが1である正四面体の体積を求めよ．

(2) 1辺の長さが1である正八面体の体積を求めよ．



(1) 1辺の長さがすべて1である正四面体 ABCD の体積を考える．すると，A から平面 BCD に下ろした垂線の足 H は △BCD の重心と一致するのであった．よって BC の中点を M とおくと

$$\mathrm{DM} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

となるので，△AHD にピタゴラスの定理を用いると

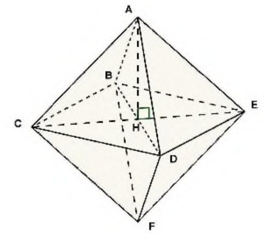
$$\mathrm{AH}^2 = \mathrm{AD}^2 - \mathrm{DM}^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\mathrm{AH} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

一方，$\triangle\mathrm{BCD} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

であるから，正四面体 ABCD の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{BCD}\cdot\mathrm{AH} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{12}\ \ (Ans.)}$$



(2) 1辺の長さがすべて1である正八面体 A-BCDE-F を考える．すると，回転における対称性より，これは2つの合同な正四角錐 A-BCDE，F-BCDE に分割することができるので，正四角錐 A-BCDE の体積を求めればよい．

四角形 BCDE は正方形となる．

($\because$ BC = CD = DE = EB で，円に内接.)

よって，A から平面 BCDE に下ろした垂線の足 H は対角線 BD と CE の交点となる．

($\because$ H は外接円・内接円の中心.)

△AEH についてピタゴラスの定理を用いると，正四角錐の高さ

$$\mathrm{AH}^2 = \mathrm{AE}^2 - \mathrm{EH}^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{AH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

底面 四角形 BCDE = 1．以上より

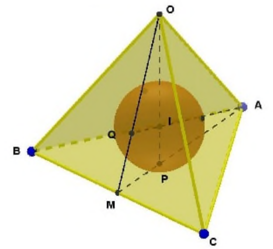
$$\text{正四角錐 A-BCDE} = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\text{正八面体 A-BCDE-F} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{3}\ \ (Ans.)}$$

問題2

1辺の長さが1である正四面体に内接する内接球の半径をもとめよ．ただし，内接球とは三角錐の各面と接する球を指し，内接球は各面の内心 (すなわち外心・重心・垂心) において各面と接するものとする．

※ 四面体の内心の本来の定義は「四面体の6つの二面角の二等分面が1点で交わる点」，外心の本来の定義は「四面体の6つの稜の垂直二等分面が1点で交わる点」である．存在することは本来証明が必要だが，ここでは省略する．また，正四面体においては外心と内心が一致することを利用してもよい．



(解答) 右図のように，正四面体 OABC において BC の中点 M, O, A から対面に下ろした垂線の足を P, Q とおく．すると

$\mathrm{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

$$\mathrm{OQ} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

一方 $\mathrm{AM} = \mathrm{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

$$\mathrm{PM} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

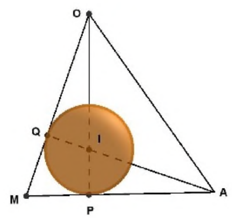
よって $\mathrm{OP} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

一方いま，$\triangle\mathrm{OMP} \backsim \triangle\mathrm{OIQ}$ となるから

OQ : IQ = OP : MP

$$\frac{\sqrt{3}}{3} : \mathrm{IQ} = \frac{\sqrt{6}}{3} : \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\mathrm{IQ} = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$



よって内接球の半径は $\frac{\sqrt{6}}{12}$

(別解) 正四面体の特殊性に注目した場合

正四面体の内心と外心は一致するので，内心 I と頂点 OABC を結ぶと IO = IA = IB = IC

よって四面体 OABC は4つの合同 (すなわち等積) な四面体 IOAB , IOBC , IOCA , IABC に分けられる．

一方で

(四面体 OABC) = (四面体 IOAB) + (四面体 IOBC) + (四面体 IOCA) + (四面体 IABC)

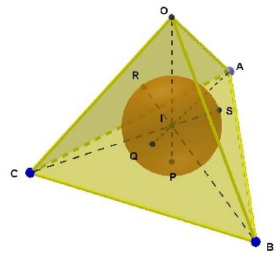
となるが，それぞれの四面体は等積であるから

(四面体 OABC) = 4 (四面体 IABC)……①

となる．ここで O から ABC に下ろした垂線の足を P とすると

(四面体 OABC) = $\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{OP}$

(四面体 IABC) = $\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{ABC}\times\mathrm{IP}$



① に代入すると

OP = 4IP

いま $\mathrm{OP} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ であるから $\mathrm{IP} = \frac{\sqrt{6}}{12}$. これが求める内接球の半径である．

11/29 第 20 回授業　　　__組__番　氏名____________________

木日の活動の振り返り

今日の授業を振り返り．以下の質問に答えてください．(所要時間 1 分程度)

次の内容について，今のあなたの思いを 1～5 の選択肢から選び，そう思った理由を教えてください．

今日の授業の内容はよく分かった．

全くそう思わない	あまりそう思わない	そう思う	かなりそう思う	すごくそう思う
①	②	③	④	⑤

そう思った理由は？：

[　　　　　　　　　　]